

《高中數學課程闡釋：必修部分》「探索與研究」學習單位新增內容

灰色為原有內容

學習單位	學習重點	時間
進階學習單位		
20. 探索與研究	通過不同的探究活動和數學建模學習活動，建構和應用數學知識，進一步提高探索、溝通、思考、形成數學概念和應用數學的能力	10

課程闡釋：

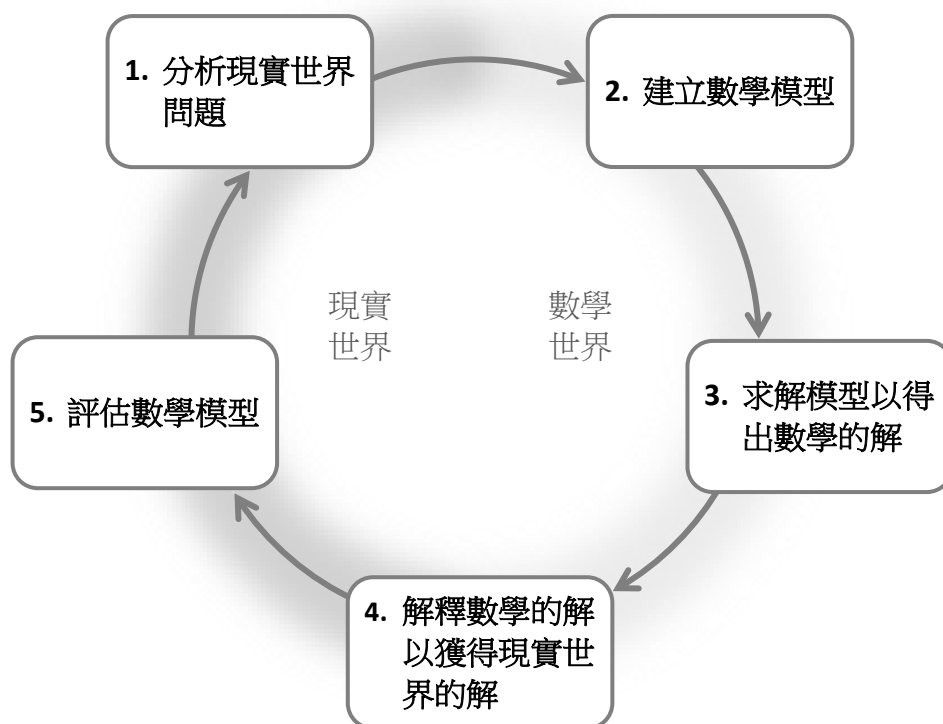
本學習單位旨在提供更多學習空間，讓學生在學習其他學習單位的內容時，能參與更多有助發現及建構知識的學習活動，提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力；以及通過數學建模學習活動，提升他們應用數學解決現實問題的能力。換句話說，這並非一個獨立和割裂的學習單位，教師可運用建議的課時，讓學生參與不同的學習活動，例如有關增潤課題的活動、跨學習單位的活動、建基於數學課題的跨學習領域活動等，當中教師應為學生規劃每學年約 2-3 小時的數學建模學習活動¹，讓學生在面對現實世界不同情境的問題時，能以數學思維進行分析與決策，加強他們應用數學解決 STEAM 及其他現實情境問題的能力。教師可善用數學科的課堂、為專題研習或跨學科學習而設的課堂，或其他合適課堂，以及配合其他學時，例如課後、試後活動時段等，進行數學建模學習活動，而數學建模學習活動應被視為數學科的 STEAM 學習活動。

1. 數學建模過程

數學建模是一個運用數學知識和工具解決現實世界問題的過程，強調運用數學方式思考問題和分析數據。教師應引導學生**分析現實世界問題**，釐清問題的關鍵因素和找出相關的資料／數據，以及當中的數學元素，並通過提出合適假設以簡化問題，以及把問題轉化為數學問題，進而考慮相關的量及變量之間的關係；學生運用已有數學知識和技能**建立數學模型**，並求解模型得出**數學的解**，再通過**解釋數學的解**在現實世界情境的意義，從而得出**現實世界的解**。其後可通過驗證和反思以**評估數學模型**，從而提出優化模型的建議。下頁圖一及表一分別為數學建模過程的五個步驟和各步驟的相關元素：

¹ 學校可因應學生學習數學建模的情況，於中六級不安排建模活動，或安排約 1-2 小時的建模活動。

圖一：數學建模過程



表一：數學建模步驟的元素

數學建模步驟	各步驟的相關元素
1. 分析現實世界問題	- 理解現實世界情境 - 釐清問題的關鍵因素 - 識別與問題相關的資料／數據及問題中的數學元素
2. 建立數學模型	- 提出假設以簡化現實世界問題 - 以數學方式表述問題 - 確定關鍵量／變量之間的關係
3. 求解模型以得出數學的解	應用數學知識、技能，以及不同的工具求解模型
4. 解釋數學的解以獲得現實世界的解	考慮數學的解在現實世界問題下的意義
5. 評估數學模型	- 按現實世界情境驗證模型 - 反思模型的優點和限制 - 比較不同模型 - 提出優化模型的建議

上頁所示數學建模過程的各個步驟及其元素，旨在為教師提供一般性的建模過程作為參考，以便教師設計數學建模學習活動。教師可根據實際教學情況及學生的能力調整個別步驟或略去當中某些元素，例如若活動中並未產生多個數學模型，步驟 5「評估數學模型」中的元素「比較不同模型」便可省略。

在第三學習階段，學生已認識數學建模過程的五個步驟及其相關元素，並意識到在完成步驟 5「評估數學模型」後，有機會優化模型，進入數學建模過程的另一個循環。學生在第四學習階段需要純熟運用這五個步驟組成的建模循環，建立多於一個或經優化的模型來解決現實世界問題。有關各學習階段數學建模的學習，可參考表三「不同學習階段數學建模學與教要點」。

2. 數學建模學習活動的設計

數學建模學習活動的問題有別於一般數學應用題。數學應用題的情境通常已被簡化，求解過程的所需條件和資料是給定的，且資料完整及剛好足夠，其主要作用是鞏固學生對數學概念的理解和指定技巧的運用。數學建模學習活動的問題一般為未簡化的現實世界問題，具開放性，沒有指定或明確的求解方法，亦不一定存在唯一或最優解，且問題的相關條件和資料未必是完全給定的。學生需要就問題作出合適的假設，以簡化問題，並蒐集和篩選求解過程所需的資料／數據，為情境建立相應的數學模型。

對於第四學習階段的學生，教師在設計數學建模學習活動時，應留意以下各項：

- 學習活動的設計應配合數學建模的五個步驟；
- 教師除了可選用學生在現實生活中熟悉的情境來設計問題外，亦可選擇學生不太熟悉的情境，例如傳染病、土地應用和植物生長問題等。此外，與問題相關的資料／數據可以是未經整理或來源分散的；
- 教師應配合學生在此學習階段所具備的數學知識，包括方程、函數圖像、變分、不等式、三角學和概率等，選擇合適的現實世界問題；

- 教師可在數學建模學習活動中，適當融入數字科技的應用，培養學生運用適當的數字工具（包括試算表、繪圖軟件、互動幾何軟件、和人工智能工具等）建立和求解數學模型的能力；
- 教師可參考其他科目的課程文件或與其他科目協作，設計跨學科的數學建模學習活動，促進學生綜合運用不同學科知識解決問題的能力；
- 教師可因應建模活動的現實情境，在合適的活動中融入價值觀教育元素；
- 教師可按學生的能力和需要，以課堂活動或專題研習等不同形式設計建模活動。

3. 數學建模的學與教

在本學習階段，學生應有能力運用整個數學建模過程解決現實問題。教師應在建模過程中，提供適時的指導及支援，以協助學生學習自主地完成數學建模學習活動。有關數學建模的學與教，教師宜留意以下各項：

步驟 1：分析現實世界問題

- 學生參照建模活動的資料和教師的引導理解更複雜的現實世界問題，找出問題的相關因素，例如在解決有關選擇最佳午膳路線的問題時，考慮路程、行走速度和合適餐廳數目等因素。學生應決定哪些因素與數學相關和對解決問題更為重要，從而釐清問題的關鍵因素；
- 學生應學習識別有助解決問題的資料／數據，並進行蒐集、篩選或整合，以配合問題的關鍵因素。

步驟 2：建立數學模型

- 學生參照建模活動的資料和教師的引導，提出合適的假設以簡化現實問題。學生可通過不同的假設以簡化問題，他們亦應考慮假設的相關性和合理性；
- 學生在運用數學方式表達變量之間的關係以建立數學模型時，可運用不同函數的概念，以及運用正變、反變及部分變等，並通過函數圖像理解模型；
- 教師可引導修讀延伸部份的學生運用相關知識，例如求導法、矩陣及概率分佈等，建立數學模型；
- 學生在建立模型時，可適當運用計算工具或軟件，例如若學生有能力初步或直觀理解何謂「最佳擬合線」，可運用試算表或其他具備

繪畫最佳擬合線功能的工具，直接得出最佳擬合線作為數據趨勢的線性預測，然而學生不須認識其中的數學證明。

步驟 3：求解模型以得出數學的解

- 學生可按教師引導，在求解過程中靈活運用已有數學知識，以及適當地運用不同數字工具，例如運用試算表和數學繪圖軟件，求得模型的解，以減少進行繁複的計算和繪圖。例如當模型涉及較複雜的函數時，學生藉著數字工具繪畫其函數圖像，探討函數的極值或從圖像找到近似解；
- 學生亦可利用圖、表、函數和圖像等，多角度展示所建立的數學模型。

步驟 4：解釋數學的解以獲得現實世界的解

- 學生應在求得模型的解後，思考模型的解在現實世界問題情境下的意義，以解答現實世界問題。例如解釋評分類模型公式的結果時，是否必定以高分為佳；當降雨預測模型的概率結果為 60% 時，是否表示 60% 的時間會下雨；
- 教師應留意學生有否自行考慮模型的解是否符合現實世界問題的情境，以及當未符合時是否懂得處理，例如捨去數值超出設定範圍的部分結果。

步驟 5：評估數學模型

- 學生應從建模方法的角度比較不同模型，分析不同模型的優點和限制，例如預測準確度、假設的合理性和計算複雜度等，從而提出優化模型的建議。教師可鼓勵學生多表達己見，建立開放和理性討論的氛圍，從而培養他們慎思明辨和創新的能力。

教師應引導學生按他們提出優化模型的建議，重新進行建模過程，以建立優化的數學模型。學生可再次按步驟 1「分析現實世界問題」，更新問題的關鍵因素或蒐集更多的數據；或略過步驟 1，直接於步驟 2「建立數學模型」變更假設，從而更新數學模型。

4. 數學建模的評估

就數學建模的評估，教師宜留意以下各項：

- 教師可通過檢視學生在建模過程的表現及他們的建模成果，評估學生在各個建模步驟的表現，例如從課堂討論、口頭匯報、工作紙

等所反映的情況，並訂定合適的評估準則，了解學生在數學建模過程不同步驟的學習成果，從而給予適切的回饋；

- 教師可參考下頁表二，為建模活動設計評估量表，並通過評估量表就學生的求解過程及成果評估學生表現。評估量表可按建模活動所涉及的建模步驟及相關元素設計，並因應學生在各步驟及整體表現給予評價及改善建議，例如在評估學生於步驟 1「分析現實世界問題」的表現時，教師可衡量學生是否能釐清現實問題的關鍵因素，以及學生能否蒐集到合適的數據。透過這些項目，教師能更具體了解學生對數學建模各個步驟的掌握；
- 教師可在建模活動的不同階段，以口頭或書面進行適時的回饋，亦可以善用同儕互評，讓學生通過評估了解自己的學習表現，從而改善學習。教師亦可通過評估結果優化數學建模學習活動的教學。

5. 於數學建模學與教中善用人工智能

電子工具早已成為提升教學效能的重要輔助，而在數學建模的學與教實踐中善用人工智能，更能幫助教師和學生有效地探討建模問題。教師在數學建模學習活動中加入人工智能元素時，可考慮以下各項：

- 教師可引導學生運用人工智能協助了解現實問題，例如在處理評估自修室空間舒適度的問題時，學生可先自行思考及列出可能影響舒適度的因素，然後請人工智能給予回饋或生成引導學生思考其他可能因素的問題，幫助學生更深入思考和釐清問題的關鍵因素。
- 教師可引導學生運用人工智能協助進行數據整理和分析，以減省時間，讓學生更專注於問題理解、假設設定、變量關係探究及結果詮釋等思維過程。例如在選購暖包的決策活動中，學生可輸入多款暖包的數據，讓人工智能計算各項數據的平均值，快速產生比較結果或圖表；
- 教師必須認識到不能讓人工智能取代學生進行思考。教師應引導學生獨立思考，讓學生意識到人工智能是輔助進行探究和反思的工具，而人工智能所生成的內容未必正確和適切，學生需要謹慎檢視人工智能的輸出，培養慎用人工智能的態度；
- 教師也應該對學生使用人工智能的方式進行指導，避免學生直接提交由人工智能生成的結果，培養負責任地使用人工智能的意識。

教師可運用人工智能協助設計數學建模學習活動、整理數據、預測學生學習難點、製作相關學習資源等。教師需謹慎檢視人工智能的輸出，以確保教學質量和學習成效。

表二：評估量表範例

步 驟	元 素*	評 價 / 回 饋
1. 分析現實世界問題	- 能理解現實世界情境 - 能釐清問題中的關鍵因素 - 能識別與問題相關的資料／數據及問題中的數學元素	(教師可在活動不同階段，按建模步驟及相關元素，就學生表現給予評語，亦可給予分數或等級並配以相應描述。)
2. 建立數學模型	- 能提出合適假設以簡化現實世界問題 - 能運用數學方式表述問題 - 能確定關鍵量／變量之間的關係	
3. 求解模型以得出數學的解	- 能應用數學知識、技能，以及不同的工具求解模型	
4. 解釋數學的解以獲得現實世界的解	- 能考慮數學的解在現實世界問題下的意義	
5. 評估數學模型	- 能按現實世界情境驗證模型 - 能反思模型的優點和限制 - 能比較不同模型 - 能提出優化模型的建議	
整體回饋：		

*表中的元素可因應建模活動更具體地表述，例如當活動涉及以數字工具協助計算，表中步驟3的元素「能應用數學知識、技能，以及不同的工具求模型的解」可改為諸如「能運用試算表整理不同情況的數據和計算所需數量」

6. 教學資源

有關數學建模學習活動例子，可參考教育局數學教育組網站的教學資源。

表三：不同學習階段數學建模的學與教要點

		第二學習階段 (小四至小六)	第三學習階段 (中一至中三)	第四學習階段 (中四至中六)
問題	1. 問題的性質和複雜程度	- 建基學生熟悉的日常生活情境 - 提供所需的相關資料／數據 - 引導學生建立一個簡單的模型	- 建基學生熟悉的現實生活情境 - 提供的資料／數據可以是過多或不足 - 要求學生建立一個或多個模型	- 建基學生熟悉的現實生活情境，亦可選取學生不太熟悉的情境 - 提供的資料／數據可以是未經整理或來源分散的 - 要求學生建立多於一個或經優化的模型
教師	2. 教師指導	提供結構化的建模活動，並給予學生充足及清晰的指示，以及密切的指導與支援	提供充足的指導及支援，亦同時給予足夠空間讓學生自行探究問題	在過程中提供適時的指導及支援，以協助學生學習自主地完成數學建模學習活動
學生	3. 學生對建模過程的認識	- 按教師引導體驗建模過程，當中相對地較少強調模型評估的步驟 - 意識到數學能用於模擬現實世界的情境以解決問題，而非在後設認知層面上認識建模過程	按教師引導根據數學建模過程的五個步驟認識數學建模過程	學習自主地按照數學建模過程的五個步驟進行數學建模學習活動

		第二學習階段 (小四至小六)	第三學習階段 (中一至中三)	第四學習階段 (中四至中六)
學生	4. 學生建模能力	- 提出或認識為簡化現實世界問題而作的假設 - 將現實世界問題表述為簡單的數學問題，並根據所提供的關鍵量／變量建立相應的模型 - 提出或認識模型可能存在的優點與限制	- 提出合適假設以簡化現實世界問題 - 將現實世界問題表述為數學問題，並通過識別關鍵量／變量和以數學方式表達其關係，建立相關的數學模型 - 進行模型評估，例如將模型結果與現實世界數據作比較，以識別模型的優點和限制 - 提出優化模型的建議	- 提出合適假設以簡化現實世界問題，並說明假設的相關性和合理性 - 將較為複雜的現實世界問題表述為數學問題，並通過數學方式定義、識別和組織關鍵量／變量，建立相關的數學模型 - 理解模型評估的重要性，並進行模型評估，以識別模型的優點和限制 - 進行模型優化
	5. 學生在建模過程中數學知識和工具的應用	- 在建模過程中應用初小及高小的數學知識與技能，例如算術運算、面積、百分比、平均數等 - 使用實物、圖、表和簡單數式等，來表達建模結果 - 在建模過程中適當地使用計算機和簡易的數字工具等	- 在建模過程中應用先備知識及在初中學習的數學知識，例如一元一次方程、二元一次方程、多項式、三角學、概率等 - 使用圖、表、代數式和圖像等，展示模型結果 - 在建模過程中適當地使用數字工具，例如試算表、數學繪圖軟件、動態幾何軟件和人工智能工具等	- 在建模過程中應用先備知識及在高中學習的數學知識，例如函數及其圖像、變分、立體幾何、概率、求導法*、矩陣*和概率分佈* - 使用圖、表、函數和圖像等，展示模型結果 - 在建模過程中適當地使用數字工具，例如試算表、數學繪圖軟件、動態幾何軟件、微積分計算工具*、矩陣計算工具* 和人工智能工具等

* 適用於修讀單元一或單元二的學生